



## EL MÉTODO DE ERATÓSTENES. CÁLCULO

### Descripción

En esta ficha se presentan distintas formas de realizar los cálculos a partir de los datos de observación y medida con el gnomon.

Para facilitar la comprensión se presentan un par de ejemplos con los cálculos completos.

### Nivel a que va dirigida

Infantil Escolar inicial	Escolar Medio	Escolar Avanzado	Observaciones públicas	Profesores
-----------------------------	------------------	---------------------	---------------------------	------------

Cada profesor, dependiendo del nivel de escolaridad de sus alumnos y, en caso de alumnos mayores, su familiaridad más o menos grande con reducción de datos de laboratorio, adaptará el nivel y contenido de la explicación.

### Objetivos

Presentar la idea original de Eratóstenes. Explicar la forma de realizar el cálculo a partir de los datos de dos observadores.

Presentar la forma de realizar el cálculo conjunto, a partir de los datos de un número grande de observadores.

### Métodos de cálculo

#### 1.- El cálculo original de Eratóstenes

Como se dijo en la ficha Cómo explicar la Medida de Eratóstenes, este sabio observó la diferencia entre los ángulos bajo los cuales el inciden los rayos del Sol en dos puntos, Asuán y Alejandría. En Asuán los rayos del Sol incidían perpendiculares a la superficie de la Tierra, iluminando el fondo de un pozo, en determinados días del año; y esto nunca había sido observado en Alejandría.

Explicó estas diferencias por la forma esférica de la Tierra. También dedujo que el ángulo de los radios desde el centro de la Tierra a estos dos puntos, situados aproximadamente en dirección Norte-Sur (hoy diríamos el ángulo diferencia de latitud de dos puntos situados en el mismo meridiano), tenía que ser el mismo que el ángulo formado por los rayos del Sol con la vertical en Alejandría (Ver Figura 1)

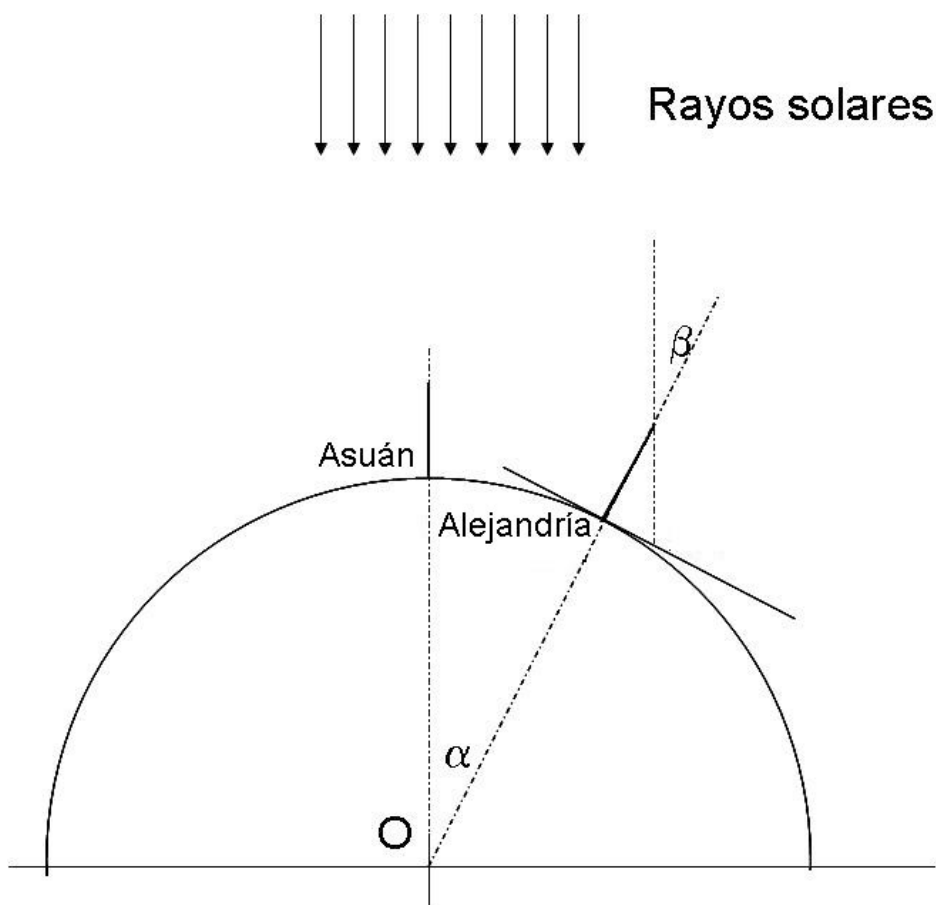


Figura 1.- En Asuán los rayos solares inciden de forma perpendicular. La separación angular entre Asuán y Alejandría (ángulo  $\alpha$ ) es igual al ángulo que forman los rayos solares con la vertical en Alejandría (ángulo  $\beta$ ).

Estimó este ángulo en 1/50 de circunferencia y por tanto la circunferencia completa de la Tierra debería ser cincuenta veces la distancia que separaba ambas ciudades.

Se cuenta que para medir la distancia entre Asuán y Alejandría envió un esclavo a contar pasos.

## 2.- Cálculo a partir de las medidas de dos observadores situados en un mismo meridiano

Una de las formas más sencillas de comprender y aplicar el método de Eratóstenes se basa en las medidas de dos observadores situados en un mismo meridiano. No hace falta que uno de ellos esté en latitud inferior a la del Trópico para que los rayos sean perpendiculares al suelo en su lugar de observación.

En este caso cada observador deberá determinar el ángulo que forma el Sol con la vertical de su lugar de observación (o el complementario, altura del Sol sobre el horizonte) en el momento del tránsito por el meridiano.



En la Figura 2 se puede ver que, para cada observador se cumple la siguiente relación entre los diferentes ángulos

$$\varphi = \text{Dec} + \alpha \quad \text{[I]}$$

siendo  $\varphi$  la latitud del lugar de observación,  
 $\alpha$  el ángulo que forman los rayos del Sol con la vertical del lugar,  
y Dec la declinación del Sol en el momento de la observación, coincidente para ambos observadores y correspondiente al instante de paso del Sol por el meridiano común.

Reescribiendo la expresión anterior para dos observadores (indicados mediante subíndices 1 y 2) y restando ambas expresiones se tiene

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{[II]}$$

O sea, la medida angular del arco que separa dos ambos observadores equivale a la diferencia de los ángulos que en cada uno de los lugares forman los rayos del Sol con la vertical del lugar.

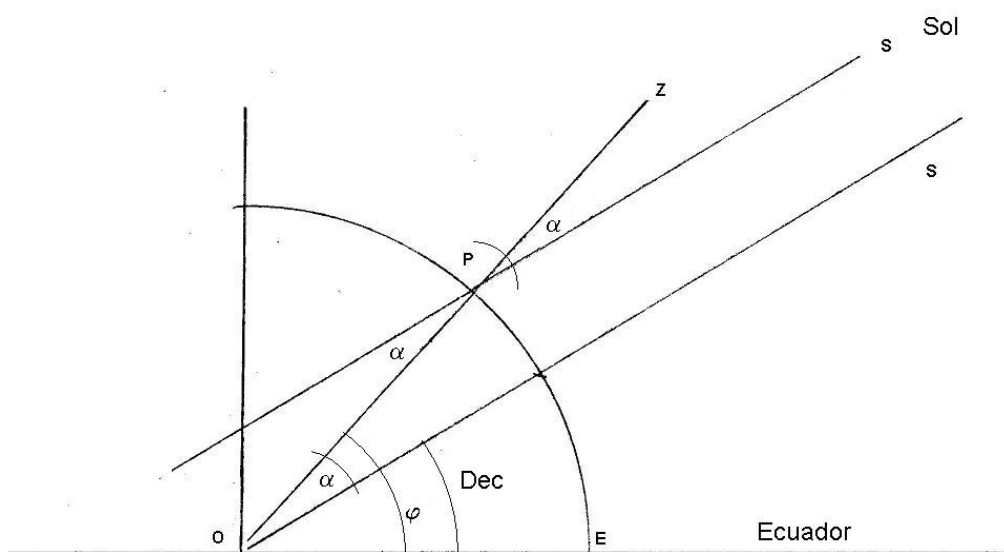


Figura 2

Por otra parte habrá que medir la distancia lineal (en kilómetros) entre ambos observadores. Se puede hacer sobre un mapa.

El cociente de ambas medidas da el resultado deseado: Dividiendo la distancia en kilómetros entre la distancia angular se obtiene la proporción kilómetros/grado, y de aquí se obtiene (multiplicando por 360°) la circunferencia de la Tierra y de aquí (dividiendo entre 2 pi) el Radio de la Tierra.



### 3.- Cálculo a partir de las medidas de dos observadores que no estén en el mismo meridiano

La expresión [I] del apartado anterior sigue siendo válida.

La expresión [II], obtenida de la resta de la expresión [I] para cada uno de los observadores solamente será válida si consideramos que no se ha modificado la Declinación del Sol en el intervalo de tiempo transcurrido entre ambas observaciones.

En principio se podrá considerar que esta condición se cumple cuando las medidas se realizan un mismo día, porque la variación de la Declinación del Sol, durante unas pocas horas transcurridas entre ambas medidas es inferior a la incertidumbre de las medidas realizadas con instrumentos sencillos.

En cuanto a la separación lineal entre ambos observadores, deberá sustituirse por la distancia entre los paralelos que pasan por cada uno de los lugares de observación. Una forma alternativa y más sencilla es estimar, para cada uno de ellos, la distancia a un paralelo de referencia y calcular luego la diferencia.

Para conseguir buenos resultados es conveniente formar pares de observadores con la mayor distancia posible entre ellos en la dirección Norte-Sur. Para distancias de unos pocos centenares de kilómetros es posible que los errores inherentes a la medida de la sombra den un margen de error grande en el resultado final.

### 4.- Cálculo a partir de las medidas de un número grande de observadores

Como actividad dentro del Año Internacional se propone la medida del radio de la Tierra a partir de las medidas de un número grande (centenares) de observadores que deseen participar.

Con independencia de que posibles pares de observadores participantes puedan hacer cálculos individuales de la forma descrita en los dos apartados anteriores, se propone una forma distinta de reducir los datos a fin de obtener un resultado conjunto.

Dos son las razones para esta forma de proceder:

Destacar el carácter de determinación conjunta, de resultado compartido como una forma de adhesión al Año Internacional.

Alcanzar una precisión mayor en el resultado final.

Posiblemente la comprensión del método deberá restringirse a alumnos de cursos de Bachillerato con una cierta experiencia en la reducción de datos de laboratorio (experiencias de Física).

Si se tiene un conjunto de puntos  $(x_i, y_i)$ , tales que se cumple para cualquier par de puntos

$$(y_j - y_i) / (x_j - x_i) = \text{constante} \quad \text{[III]}$$

la representación de estos puntos sobre coordenadas cartesianas es una línea recta, definida por la función



$$y = mx + b$$

donde m es la constante de proporcionalidad definida en [III].

Dado el número de observadores, esta será la forma en que se realizará el cálculo con los datos del 26 de marzo de 2009. La recogida, representación y cálculo se realizarán, de forma centralizada con los datos de todos los observadores. Lógicamente estos datos y cálculos serán después de dominio público.

## **Comparación de los métodos de cálculo**

Para ilustrar y comparar los distintos métodos de cálculo se presentan dos ejercicios de cálculo.

Uno de ellos ficticio, pero con datos muy semejantes a los que se espera obtener el día de la realización de la experiencia.

En otro se han manejado los datos que se obtuvieron en una experiencia realizada en el marco de los proyectos Comenius.

### 1.- Realización de la experiencia con centros de España

Se presentan en la Tabla 1 los datos de un experimento ficticio, con datos de distintas ciudades de España.

A partir de la latitud del observador se ha calculado la altura teórica del Sol referida a un día en que la Declinación del Sol era de  $-1^{\circ} 6' 28''$

La altura teórica del Sol, la Declinación del Sol y la Latitud del lugar están relacionadas, en el momento del tránsito del Sol por el meridiano por la expresión

$$90^{\circ} - \text{altura del Sol} = \text{Latitud} - \text{Declinación}$$

Los valores de la columna Altura del Sol (medida) se han calculado en realidad a partir de la altura teórica, introduciendo un error aleatorio para dar un valor dentro del intervalo  $\pm 1^{\circ}$  del valor exacto; este error es posiblemente inferior que el error que se puede esperar en las medidas que realicen los participantes en la actividad.

Los valores distancia al paralelo  $40^{\circ}\text{N}$  se han medido sobre un atlas.



Ciudad	Latitud	Altura Sol grados (teoría)	Altura Sol grados (medida)	Distancia al paralelo 40°N
Santander	43,28°	45,43 °	44,90 °	381 km
Barcelona	41,30°	47,39 °	47,00 °	153 km
Madrid	40,24°	48,49 °	47,90 °	48 km
Valencia	39,28°	49,43 °	50,40 °	-60 km
Sevilla	37,24°	51,51 °	50,90 °	-288 km
Cádiz	36,32°	52,36 °	51,60 °	-381 km
Las Palmas de Gran Canaria	28,06°	60,79 °	59,80 °	-1320 km

Tabla 1

Con estos datos puede procederse al cálculo.

Para cada par de observadores se puede calcular un valor de la proporción kilómetros / grado

$$\frac{\text{Distacia al paralelo } 40_{(\text{Observador } 1)} - \text{Distacia al paralelo } 40_{(\text{Observador } 2)}}{\text{Altura del Sol}_{(\text{Observador } 1)} - \text{Altura del Sol}_{(\text{Observador } 2)}}$$

Este valor, multiplicado por 360° nos da el valor de la circunferencia de la Tierra.

Los resultados de la circunferencia de la Tierra, a partir de los datos de cada par de observadores, se encuentran en la Tabla 2.

	Santander	Barcelona	Madrid	Valencia	Sevilla	Cádiz
Barcelona	34.200 Km					
Madrid	29.232 Km	22.248 Km				
Valencia	33.768 Km	33.336 Km	64.800 Km			
Sevilla	35.964 Km	36.936 Km	46.512 Km	41.040 Km		
Cádiz	35.640 Km	36.288 Km	42.912 Km	38.520 Km	33.480 Km	
Las Palmas	40.032 Km	41.112 Km	43.956 Km	42.804 Km	43.200 Km	44.496 Km

Tabla 2

En la Tabla 2 se puede apreciar la dispersión de los resultados. Los valores obtenidos son más exactos cuando los pares de observadores se encuentran muy alejados en la dirección Norte-Sur.



Para realizar el cálculo con estos mismos datos de forma conjunta (Método 4, página 4 de esta ficha) se representan sobre unos ejes de coordenadas, los puntos correspondientes a cada observador, en abscisas el ángulo altura (medida) del Sol y en ordenadas la distancia en al paralelo 40°N

Esta gráfica se ha representado en la Figura 3

Se ha calculado la pendiente de la recta de regresión, que ha dado un valor de 114,5 Km/grado

A partir de este valor se calculan sin dificultad la circunferencia y el radio de la Tierra.

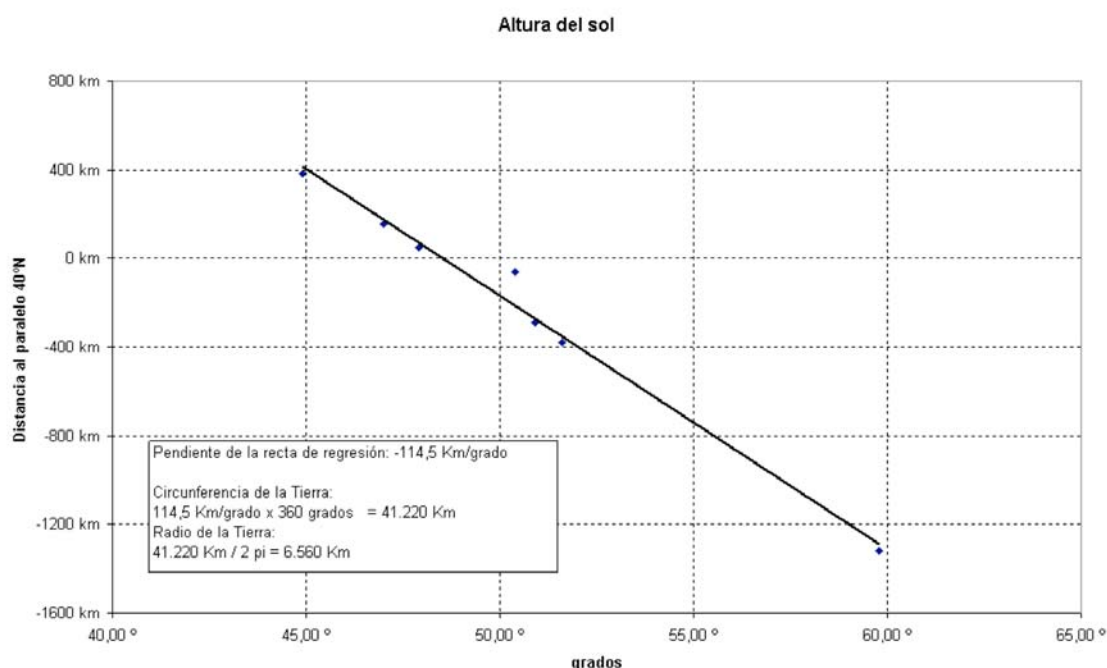


Figura 3

## 2.- Cálculos obtenidos en una experiencia real

Una de las personas que participarán en la experiencia, Emilia Navarro, del IES Juan de Garay de Valencia, comunicó una experiencia semejante que realizaron un grupo de centros escolares de distintos puntos de Europa, dentro de los proyectos Comenius, y autorizó la utilización de estos datos como ejemplo de los cálculos propuestos.

El proyecto completo se puede encontrar en la página [www.mosaicscience.es/index.html](http://www.mosaicscience.es/index.html), y las medidas de Eratóstenes se encuentran siguiendo Works, Posters, en un apartado Activities.

Datos obtenidos (transcripción parcial de los datos de la Web)



Observador	Latitud (grados)	Sombra (m)	Distancia (Km)	Ang (grados) (Zenit-Sol)
Gela (Italia)	37,04	1,01	0	45,3
Valencia	39,20	1,00	240	45,0
Shumen (Bulgaria)	43,18	1,28	682	52,0
Olsztyn (Polonia)	53,46	1,80	1824	60,9
Valer (Noruega)	60,23	2,62	2576	69,1

Tabla 3

La columna Sombra da la longitud medida de la sombra de un gnomon de 1 m de altura

La columna Distancia da la medida en kilómetros entre el paralelo que pasa por cada lugar de observación y el paralelo que pasa por Gela, el punto situado más al Sur de entre los lugares de observación

La columna Ang(Zenit-Sol) es la distancia angular entre el Zénit y el Sol, o sea el ángulo que forman los rayos solares con la vertical del lugar; se ha obtenido a partir de la longitud de la sombra (columna tercera), calculando

$$\text{Ang (Zenit-Sol)} = 90^\circ - \text{atan}(\text{Long. gnomon} / \text{Long. sombra del gnomon})$$

Cálculo del radio de la Tierra, por cálculo a partir de pares de observadores.

La Tabla 5 (Recuadros de intersección fila columna) presenta los resultados de los cálculos de cada par de observadores, proporción kilómetros/grado, circunferencia de la Tierra y radio de la Tierra. La explicación de los datos se da en la Tabla 4.

	Observador 1	
Obs 2	Diferencia de Distancia	Cálculo de la proporción Kilómetros/grado
	Diferencia de Ang(Zenit-Sol)	Circunferencia de la Tierra
		Radio de la Tierra

Tabla 4

Los datos de la parte izquierda de cada recuadro se han tomado de Tabla1.



Los valores de la parte de la derecha han sido calculados:

La proporción Kilómetros/grado, por cociente de los datos de Diferencia de distancia y Diferencia del ángulo (Zenit-Sol).

La circunferencia de la Tierra, multiplicando el valor anterior por 360°. Debería dar el valor conocido de 40.000 Km

El radio de la Tierra dividiendo el valor anterior entre 2 pi.

Puede verse que los resultados obtenidos presentan una cierta dispersión. Y que las mejores aproximaciones a los valores esperados corresponden a pares de observadores separados por distancias grandes en la dirección Norte-Sur (superiores a los mil kilómetros).

No se ha hecho el cálculo para el par de observadores Valencia Gela. La distancia en dirección Norte-Sur es demasiado pequeña para dar resultados significativos.

	Gela		Valencia		Shumen		Olsztyn	
Valencia	240 Km							
	-0,3 °							
Shumen	682 Km	101,8 Km/°	442 Km	63,1 Km/°				
	6,7 °	36.648 Km	7,0 °	22.716 Km				
		5.833 Km		3.615 Km				
Olsztyn	1824 Km	116,9 Km/°	1584 Km	99,6 Km/°	1142 Km	128,3 Km/°		
	15,6 °	42.084 Km	15,9 °	35.856 Km	8,9 °	46.188 Km		
		6.698 Km		5.707 Km		7.351 Km		
Valer	2576 Km	108,2 Km/°	2336 Km	96,9 Km/°	1894 Km	110,8 Km/°	752 Km	91,7 Km/°
	23,8 °	38.952 Km	24,1 °	34.884 Km	17,1 °	39.888 Km	8,2 °	33.012 Km
		6.199 Km		5.552 Km		6.348 Km		5.254 Km

Tabla 5

### Determinación conjunta del Radio de la Tierra

A continuación se aplica, a estos mismos datos, el cálculo de un valor único y conjunto llevando a la gráfica Figura 4 las columnas Distancia y Ang (Zenit-Sol) de la Tabla 3.

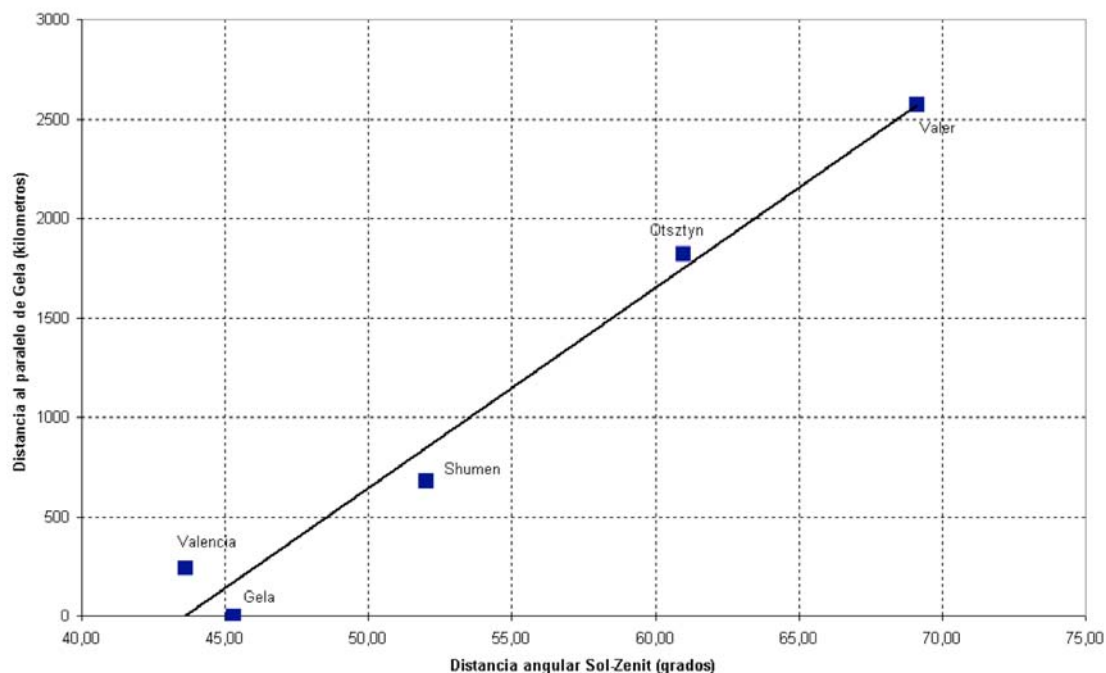


Figura 4

A observar que los puntos (con la pequeña dispersión propia de las medidas con instrumentos poco precisos), definen suficientemente bien una línea recta. La pendiente de esta recta, calculada mediante la aproximación por mínimos cuadrados es de  $104,6 \text{ Km}^\circ$ .

A partir de este resultado se calcula la circunferencia de la Tierra en 37.642 Km y el radio de la Tierra en 5.990 Km.

El resultado tiene un margen de error del orden del 6%, aceptable si se tiene en cuenta la sencillez del instrumental utilizado.

### Conclusión

La realización de un cálculo conjunto a partir de las medidas aportadas por los distintos observadores puede presentar una cierta mayor complejidad de cálculo. Pero a cambio permite dar un resultado único que a su vez es una mejor aproximación que la mayoría de las determinaciones hechas a partir de los datos de dos únicos observadores.

Se dan las gracias a Emilia Navarro por informar de los datos del proyecto Comenius 'A Mosaic of Science and Culture' y por autorizar su uso para esta explicación.